Documento de Trabajo 98-08
Serie de Economía de la Empresa 02
Marzo 1998

Departamento de Economía de la Empresa
Universidad Carlos III de Madrid
Calle Madrid, 126
28903 Getafe (España)

LA VALORACIÓN DE ACTIVOS MEDIANTE OPCIONES DE INTERCAMBIO: APLICACIÓN A LAS FINANZAS EMPRESARIALES

Salvador Rayo Cantón* y David Camino Blasco**

Resumen

Este trabajo tiene por objeto analizar la ecuación diferencial de Black and Scholes y evaluar su aplicación en la valoración de opciones de intercambio de activos reales. Los modelos de valoración de opciones financieras, que han sido objeto de un gran desarrollo formal en los últimos años, tienen un campo de aplicación de gran interés en la valoración de activos, tanto reales (fusiones y adquisiciones de empresas, opciones de abandono y crecimiento de las inversiones, etc.) como financieros (deuda empresarial, derechos de suscripción, obligaciones convertibles, etc.) que adquieren una nueva perspectiva desde esta teoría de derechos contingentes, que complementa y, en ocasiones, sustituye con ventaja a las valoraciones tradicionales basadas en los descuentos de flujos de caja ajustados al riesgo.

Palabras Claves:
Valoración de opciones, Opciones reales, Opciones de intercambio, Black and Scholes.

* Prof. Titular de Economía Financiera de la Universidad de Granada

**Prof. Titular de Economía Financiera de la Universidad Carlos III de Madrid. Email: dcamino@emp.uc3m.es

Los autores agradecen a los profesores Alejandro Balbás y Sandro Brusco las valiosas críticas, comentarios y sugerencias realizadas a este trabajo.

I. INTRODUCCION.

Básicamente, una opción es un activo financiero que otorga el derecho (sin asumir obligaciones) a su propietario a comprar (opción call) o a vender (opción put) un determinado activo (subyacente) a un precio en un período de tiempo especificado. El precio que se paga por la opción cuando se ejercita el derecho se denomina precio de ejercicio y el último día que puede ejercitarse fecha de vencimiento. Si la opción sólo puede ejercerse en una determinada fecha futura se denomina opción europea y si su ejercicio es en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento opción americana.

Desde el punto de vista de la valoración, la definición anterior permite que tanto la estructura económica como financiera de una empresa puedan analizarse como un contrato de opción. En primer lugar, las opciones que se encuentran, de forma implícita, en el pasivo son de gran interés para la gestión financiera ya que afectan al valor de las distintas fuentes de financiación y a la determinación del coste medio ponderado de capital de la empresa. También las decisiones de inversión que asumen las empresas se pueden contemplar como derechos contingentes, sobre todo si incorporan algún tipo de flexibilidad u opción que tenga valor.

El modelo de valoración de opciones propuesto por Black y Scholes en 1973 demostró que el capital propio de la empresa puede analizarse como un derecho reclamable, en el sentido de que los accionistas poseen el equivalente a una opción de compra sobre los activos de la empresa, con precio de ejercicio el valor al vencimiento de una deuda cupón cero, considerando así a los obligacionistas como los propietarios de los activos y como vendedores de la mencionada opción. Posteriormente autores como Merton (1974,449-470; 1977, 241-249), Galai-Masulis (1976, 53-81), Myers (1977, 147-176;1987, 6-13), Jones-Mason- Rosenfeld (1984, 611-624), Mason-Merton (1985), Cheung (1990, 728-729), Weston-Copeland (1992, 521-529) y Trigeorgis (1996, 107-116), entre otros, han ampliado el campo de la valoración mediante opciones a las decisiones económicas y financieras de la empresa.

La emisión de algunos títulos por parte de la empresa incorporan determinados derechos que introducen cierto grado de *flexibilidad* en la estructura financiera, como es el caso de la emisión de obligaciones con warrants, de obligaciones convertibles y de obligaciones con cláusula de rescate anticipado a su favor, también denominado bonos rescatables o *callable bond.* En el primer caso, el warrant otorga al obligacionista el derecho a comprar acciones de una empresa a un precio estipulado antes de una determinada fecha. En el segundo, el propietario del título tiene el derecho a cambiarlo por un número de acciones de la empresa si el valor de las mismas es superior al de los títulos de renta fija. En el tercero, la empresa, como emisor, tiene la posibilidad de rescatar las obligaciones antes de su vencimiento a un precio de compra fijado previamente, opción que se ejerce cuando los tipos de interés descienden y se desea reducir el coste de capital[2].

---

[2] La operación de naturaleza opuesta otorgaría al suscriptor de las obligaciones el derecho a la amortización o devolución anticipada de los títulos por parte de la empresa, como consecuencia del coste de oportunidad que se

Actualmente se considera que uno de los aspectos más importantes que permiten a la empresa mantener mayores niveles de competitividad en los mercados es su capacidad para responder con flexibilidad a los cambios de su entorno. Por consiguiente, la flexibilidad aporta un valor adicional para la empresa, aunque hay que indicar que este es un concepto difícil de precisar desde una perspectiva aplicada a la gestión empresarial. En este sentido, merece destacarse la aproximación al concepto que hace Scott Mason cuando afirma que *para los directivos profesionales tanto la flexibilidad operativa como estratégica -es decir, la opción de poder alterar el curso de una acción planeada para el futuro, dada una información disponible- son elementos muy importantes en la valoración y planificación de decisiones* (Trigeorgis, 1996).

A partir de esta definición son varios los interrogantes que se plantean: ¿cómo se cuantifica su valor?, ¿cuántos tipos de flexibilidad debe considerar la empresa?, si existen, ¿cómo interactúan y qué relación mantienen ?, ¿cómo afecta la competencia a la flexibilidad ?, ¿ incorporan la flexibilidad las técnicas tradicionales de valoración como el descuento de flujos de caja, la simulación de Monte Carlo o los árboles de decisión ?.

No cabe duda de que las opciones han hecho posible la incorporación al análisis y selección de inversiones de múltiples modalidades de flexibilidad operativa que crean valor, en el sentido de que una empresa que tiene la opción de *esperar y ver antes de invertir en un proyecto*, de *abandonarlo durante su construcción* o *al final de su vida económica*, de *cesar temporalmente la producción*, de *utilizar la inversión en usos alternativos*, de *reducir o ampliar la escala del proyecto* es más flexible y por consiguiente tiene un valor superior.

La valoración mediante opciones cuantifica la flexibilidad operativa y estratégica, de la misma forma que evaluamos la flexibilidad financiera del pasivo, reflejando el valor de esta adaptabilidad y asimetría mediante la siguiente expresión:

$$VAN\ (Proyecto\ Expandido) = VAN\ (Proyecto\ Estático) + Valor\ de\ la\ Flexibilidad \qquad (1)$$

Si bien la principal aplicación de la Teoría de Opciones ha estado centrada en el estudio de la opciones financieras, muy especialmente sobre acciones y tipos de interés, el objetivo de este trabajo está orientado a como puede adaptarse dicha teoría para valorar las decisiones estratégicas en empresas con apalancamiento. Es decir, nuestro propósito es analizar como las decisiones financieras que adoptan las empresas también pueden valorarse desde la perspectiva del análisis de derechos contingentes y, más en concreto, aplicando modelos de opciones de intercambio, aspecto que requiere un análisis previo de los fundamentos financieros sobre los que se asientan este tipo de opciones.

---

derivaría de una subida de los tipos de interés. Evidentemente la compra de la obligación incorpora una opción put con precio de ejercicio igual a su valor nominal (*putable bond*).

El desarrollo del trabajo, en lo que sigue, se estructura en varios epígrafes. En el apartado II nos detenemos en el *Análisis de Contratos Reclamables* (Contingent-Claims Analysis o CCA), con objeto de determinar la ecuación diferencial estocástica más utilizada en la literatura sobre valoración de opciones, aplicada sobre un activo subyacente, basándonos en la ausencia de *arbitraje* que proponen Black-Scholes (1973), para posteriormente generalizar al caso de n subyacentes. En el epígrafe III analizamos primero los modelos de *opciones de intercambio* más representativos, para posteriormente introducir la valoración de activos reales mediante opciones call de intercambio. En el apartado IV se valorarán, desde una perspectiva analítica, algunos efectos derivados de las decisiones estratégicas de tipo financiero que realiza la empresa, dentro de lo que actualmente se denomina *Options in Strategic Corporate Finance*, integrando los conceptos manejados anteriormente: análisis de derechos reclamables, flexibilidad financiera, operativa y opciones de intercambio. Finalmente, el apartado V se dedica a la conclusiones del trabajo y el VI a las referencias bibliográficas utilizadas.

II. ECUACIONES DIFERENCIALES ESTOCASTICAS EN EL ANALISIS DE DERECHOS RECLAMABLES.

Según se recoge en un artículo publicado por el profesor Fisher Black en la revista *The Journal of Portfolio Management* con el título " How we came up with the option formula " en el invierno de 1989, el proceso seguido hasta obtener la ecuación diferencial que les permitió determinar la fórmula del valor de una opción no fue desde luego una tarea fácil, ya que las primeras investigaciones se iniciaron en 1965 y los primeros resultados satisfactorios se obtuvieron en la primavera de 1972.

Inicialmente Black y Scholes comenzaron trabajando sobre una fórmula para valorar warrants, llegando a la conclusión de que las tasas de descuento necesarias para calcular el valor presente de estos activos dependen, entre otras variables, del precio de las acciones y del tiempo. La aproximación a la fórmula de valoración se basó en hacerla depender del precio de las acciones y en asumir sus conocidas hipótesis simplificadoras[3]. Como resultado final obtienen una ecuación diferencial, que posteriormente identificaron como una versión de la conocida *Fórmula de Transmisión del Calor* que se aplica en la Física. Comprobaron la existencia de un sistema de probabilidades neutrales al riesgo que permitía valorar el warrant sin incorporar la rentabilidad esperada del subyacente. Bastaba considerar el tipo de interés libre de riesgo y ciertas medidas del riesgo del subyacente. La solución de la ecuación diferencial es una igualdad que corresponde a la conocida fórmula de valoración de opciones de 1973.

Puesto que nuestro objetivo es aplicar la valoración de opciones de intercambio, en las que aparece más de

---

[3] En concreto, consideran costes de transacción nulos, existe la posibilidad de prestar y pedir prestado a una tasa de interés constante, el precio de las acciones sigue un paseo aleatorio con una distribución log-normal en la que la varianza de la rentabilidad de las acciones es constante, no existe reparto de dividendos ni de reservas y finalmente asumen que el ejercicio del contrato es al vencimiento o de estilo europeo.

un activo, inicialmente desarrollamos la metodología propuesta por Black-Scholes para derivar su ecuación diferencial con el activo subyacente. A partir de aquí se generalizará la ecuación diferencial a n activos subyacentes.

II.1. La ecuación diferencial de Black-Scholes.

Como ya hemos comentado, una de las principales conclusiones que se derivan del trabajo seminal de Black-Scholes (1973, 637-654) es que la estructura financiera de la empresa se puede analizar aplicando la Teoría de Opciones o el Análisis de Contratos Reclamables puesto que determinados pasivos se interpretan como combinaciones de derechos u opciones sobre el valor de los activos de la empresa. Si consideramos como subyacente el valor de la empresa o de sus activos y lo representamos por V, el capital propio, el capital ajeno, los derechos preferentes, los bonos con cláusula de rescate anticipado, los bonos convertibles, los bonos sénior y bonos júnior, entre otros, adquieren la condición de derechos contingentes sobre el valor de la empresa (Fernández Blanco, M., 1991, 149-179).

El análisis de derechos reclamables actualmente cuenta con una amplia gama de trabajos que se fundamentan en el principio de que el valor de la opción de compra, como producto derivado o que depende del valor de otro activo y del tiempo, dentro de lo que se considera un *mercado completo*, puede obtenerse formando una cartera equivalente, comprando Nc títulos del activo subyacente S y emitiendo la cantidad adecuada de bonos cupón cero, B, que se retribuyen a la tasa de interés sin riesgo[4], r, es decir, $C \approx NcS-B$. De la misma forma, el valor de la opción put se obtiene creando una cartera sintética que estaría compuesta por la venta de Np títulos del activo subyacente S y por la compra de una cantidad B de bonos cupón cero que rinden un interés sin riesgo r, $P \approx B-NpS$. Puesto que en cualquier estado de la naturaleza los rendimientos de ambas posiciones, opción y cartera sintética, son los mismos, no existe la posibilidad de realizar un beneficio derivado del arbitraje, lo que supone que el coste de construir dicha cartera sintética es también el valor de la opción.

La *Ecuación Fundamental del Análisis de Derechos Reclamables* sobre cualquier activo se fundamenta, primero, en la hipótesis de que los precios de los subyacentes en el mercado tienen un *comportamiento estocástico* y , segundo, en las hipótesis de ausencia de *arbitraje*.

En cuanto a la evolución de los precios, a lo largo del tiempo, se asumen las hipótesis de eficiencia del mercado en su forma débil, donde las variaciones de precios tienen un comportamiento incierto y los

[4] La hipótesis de *mercados completos* es de una gran utilidad dentro de la literatura sobre opciones ya que permite alcanzar los resultados más coherentes. La consideración de un mercado completo permite que la estructura de flujos de caja de cualquier activo que se negocie en el mismo pueda ser replicada, de forma dinámica, mediante una cartera autofinanciada compuesta por los demás activos, lo que posibilita su valoración, imponiendo la existencia de un precio único y de ausencia de arbitraje.

movimientos de los precios futuros son independientes de los pasados[5]. Además, y puesto que el precio de un activo es una variable aleatoria cuyo valor depende del momento en el que se la evalúa, estos precios siguen un *proceso estocástico*.

Si el comportamiento de los precios se ajusta a un *proceso estocástico de Ito* la tasa media de cambio y la varianza de éste dependen del valor del activo subyacente y del tiempo. Algebráicamente este movimiento se define mediante la expresión (2), siendo α y σ parámetros susceptibles de variación a lo largo del tiempo y dependientes del precio S del subyacente:

$$dS=\alpha(S,t)dt+\sigma(S,t)dz \qquad (2)$$

y donde dS es el cambio de precio, dz es el incremento de un proceso estándar de Weiner, $\alpha(S,t)$ y $\sigma(S,t)$ son respectivamente el coeficiente de tendencia y la varianza expresados en términos del estado actual y del tiempo, y finalmente dt es el incremento de tiempo.

Si, como hemos dicho antes, consideramos que la opción es un derecho reclamable, su precio es función de dos variables, la primera el activo subyacente, en nuestro caso el precio de la acción, y la segunda el tiempo, es decir, $F(S,t)$. Por tanto, cualquier variación en su precio, dF, en un intervalo de tiempo pequeño, dt, depende de ambas variables, de las que el precio suponemos que sigue un proceso estocástico[6]. Aplicando el cálculo estocático se obtiene finalmente la siguiente expresión[7]:

$$dF=\frac{\partial F}{\partial t}dt+\frac{\partial F}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt \qquad (3)$$

Para valorar un derecho reclamable u opción, una aportación básica ha sido la hipótesis que conecta con un mundo donde se asume neutralidad al riesgo, lo que ha hecho posible utilizar expresiones para valorar los activos derivados que son independientes de las preferencias de riesgo que tenga el inversor[8]. Conviene

---

[5] La idea que subyace en un mercado eficiente en forma débil es que la competencia que existe entre los inversores, que se supone actúan de forma racional en sus análisis, asegura que cualquier nueva información que llegue al mercado es inmediatamente incorporada a los precios. Por consiguiente, el precio actual ya refleja cualquier información pasada sobre precios, de manera que las variaciones en los precios sólo pueden producirse como respuesta a la llegada de información no prevista; de esta forma se puede afirmar que los cambios en precios y en la rentabilidad serán independientes a lo largo del tiempo, es decir, los precios se comportan como un camino aleatorio o *random walk*.

[6] En el caso de una opción de compra con precio de ejercicio E, $F(S,t)=C(S,t;E)$ y para una opción de venta con el mismo precio de ejercicio, $F(S,t)=P(S,t;E)$.

[7] Para simplificar el cálculo se supone que $\sigma(S,t)=\sigma$.

[8] La principal ventaja de valorar derechos contingentes en un contexto de neutralidad al riesgo es que la rentabilidad esperada de los títulos, que depende del nivel de aversión al riesgo del inversor, se sustituye por la tasa de interés de un activo sin riesgo. De esta forma, los flujos de caja futuros de la opción pueden valorarse actualizando sus valores esperados al tipo de interés libre de riesgo.

precisar que al referirnos a un contexto neutral no estamos diciendo que los inversores sean indiferentes al mismo, sino, más bien, que las opciones, como activos derivados de otro u otros, pueden valorarse más fácilmente sin que ninguna de las variables del modelo de valoración se vea afectada por las preferencias de riesgo que tienen los inversores[9].

Centrándonos en el concepto de arbitraje, al que antes hemos aludido, Black-Scholes demostraron que aplicando una estrategia de ajuste dinámica sobre una cartera compuesta por la compra de N títulos de un subyacente S y por la emisión de un bono cupón cero, que se retribuye a la tasa de interés sin riesgo r, se consigue determinar el valor de una opción call, siendo $C=NS-B$, donde la relación $N=\partial C/\partial S$ se denomina parámetro *delta de la call.* Si despejamos B en esta cartera equivalente obtenemos otra sin riesgo, vendiendo la opción call y comprando la proporción delta del subyacente a su precio de mercado, $B=NS-C$.

Puesto que en la evolución del precio del subyacente, S, y de la opción de compra, C, incide la misma fuente de incertidumbre, a través del comportamiento aleatorio del proceso dz, la exigencia de una valoración neutral al riesgo requiere que dicha incertidumbre sea eliminada completamente en el intervalo de tiempo dt. Para conseguir neutralizar el efecto de la incertidumbre, teniendo en cuenta la existencia de un mercado completo, se tendrá que diseñar una cartera sin riesgo, combinación del subyacente y de la call, mediante la fórmula $dB=NdS-dC$, con la que se logra replicar el comportamiento de un bono cupón cero que no está influenciado por la mencionada incertidumbre que afecta a dz, verificándose siempre que $dB=Brdt$. Finalmente, si igualamos ambas expresiones, según la fórmula (4), se obtiene la ecuación diferencial (5), cuya solución, sujeta a las condiciones de contorno adecuadas según (6), determina el valor de la opción call según la ecuación (7), expresión que depende de cinco variables (S, t, E, r y σ) que no están influenciadas por la estructura de preferencias de riesgo del inversor[10], siendo E el precio de ejercicio de la opción.

$$-\left(\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\frac{\partial C^2}{\partial S^2}\sigma^2 S^2\right)dt=\left(\frac{\partial C}{\partial S}S-C\right)rdt \tag{4}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{SS}+rSC_S-C_t-rC=0 \tag{5}$$

[9] Las variables a las que nos referimos son el precio del activo subyacente, el tiempo, la varianza del precio del subyacente y obviamente la tasa de interés sin riesgo.

[10] En la expresión (4), $C_S = \partial C/\partial S$, $C_{SS} = \partial^2 C/\partial S^2$ y $C_t = \partial C/\partial t$. En el caso de que consideremos una opción de venta se sustituirá C por P.

$$C(S,0;E)=\max(S-E,0) \quad , \quad C(0,t;E)=0 \quad y \quad \lim_{S\to\infty}\frac{C(S,t;E)}{S}=1 \tag{6}$$

$$C(S,t;E)=SN(d_1)-Ee^{-rt}N(d_2) \tag{7}$$

$$d_1=\frac{\ln(\frac{S}{E})+(r+\frac{1}{2}\sigma^2)t}{\sigma\sqrt{t}} \quad y \quad d_2=d_1-\sigma\sqrt{t} \tag{8}$$

Comprobamos como la fórmula de Black-Scholes que valora una opción call representa la estructura de una cartera sintética formada por la combinación de bonos cupón cero y acciones a la que nos hemos referido antes, sólo que aplicada en el campo continuo. Es decir, la opción call equivale, en cualquier estado de la naturaleza, a una cartera autofinanciada que tiene invertida la proporción delta, $N(d_1)$, en el activo subyacente, primer término, y por la emisión de un activo sin riesgo, tal y como indica el segundo término, $B=Ee^{-rt}N(d_2)$. Teniendo en cuenta que en esta cartera los parámetros $N(d_1)$ y B fluctúan en función del precio del subyacente y del paso del tiempo, ambos requieren un ajuste continuo con objeto de mantener la equivalencia de la cartera autofinanciada.

Para concluir, indicar brevemente que Merton (1977) introduce algunas modificaciones en la ecuación diferencial anterior. Así, en el caso de que se considere un único activo, V, la ecuación diferencial básica, a partir de la que se obtiene la solución que determina el valor de un derecho reclamable u opción sobre dicho subyacente, $F(V,t)$, se reduce a la expresión (9), donde D es la tasa constante de dividendos que paga el activo como proporción sobre V y d cualquier pago percibido por la opción durante el tiempo que está vigente en el mercado:

$$\frac{1}{2}\sigma^2V^2F_{VV}+(r-D)VF_V-F_t-rV+d=0 \tag{9}$$

II.2. Generalización de la ecuación diferencial para n subyacentes.

Si aplicamos la expresión (9) al caso que considera n activos subyacentes, manteniendo además las hipótesis implícitas en el modelo de Black-Scholes, y si asumimos la existencia de un mercado financiero completo con al menos n+1 activos que pueden ser negociados (incluido el que estamos considerando inicialmente como derecho reclamable) se llega a conclusión de que la ecuación diferencial correspondiente a un título derivado F_j, que depende del precio de n activos subyacentes V_i, que siguen, a su vez, procesos de difusión individuales según la ecuación (2), así como de la variable tiempo, viene dada por la expresión (10):

$$\frac{1}{2}\sum_{i,k}\rho_{ik}\sigma_i\sigma_kV_iV_kF_{ik}+\sum_i(r-D_i)V_iF_i-F_t-rF+d=0 \tag{10}$$

donde:

ϱ_{ik}= Coeficiente de correlación entre dz_i y dz_k (siendo $1 \leq i,k \leq n$)

$F_i \equiv \partial F/\partial V_i$, $F_{ik} \equiv \partial^2 F/\partial V_i \partial V_k$ y $F_t \equiv \partial F/\partial t$.

D_i=Tasa de dividendos que paga el activo i-ésimo como proporción sobre V_i.

d= Cualquier pago recibido por el derecho reclamable u opción hasta su fecha de vencimiento.

La fórmula (10), por tanto, se obtiene diseñando una cartera sin riesgo en la que se invierten las proporciones adecuadas en los n+1 activos para que en un espacio de tiempo infinitesimal el componente estocástico del proceso de difusión conjunto sea eliminado, de manera que la rentabilidad de dicha cartera en ausencia de oportunidades de arbitraje sea igual a la tasa de interés sin riesgo, (Hull, 1989, 176-179 y Trigeorgis, 1996, 95-98). Finalmente, el valor de cualquier contrato reclamable será la solución de dicha ecuación diferencial sujeta a las correspondientes 2n+1 condiciones finales y de contorno.

III. LA OPCIONES DE INTERCAMBIO.

Si consideramos el caso particular de dos activos subyacentes, donde V y S son los precios y D_V y D_S sus respectivos dividendos, la ecuación diferencial necesaria para valorar un contrato reclamable u opción se reduce a la expresión (11), sujeta a las correspondientes condiciones terminales y de contorno.

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2_V V^2 F_{VV} + \rho_{VS}\sigma_V\sigma_S VSF_{VS} + \frac{1}{2}\sigma^2_S S^2 F_{SS}\right) + [(r-D_V)VF_V + (r-D_S)SF_S] - F_t - rF + d = 0 \qquad (11)$$

Suponiendo que no existen pagos por dividendos, ni de otro tipo, y que cualquier rentabilidad se deriva exclusivamente de plusvalías, ($D_V = D_S = d = 0$), la solución de esta ecuación diferencial determina la expresión analítica que valora determinados casos de opciones de estilo europeo que dependen de varios subyacentes, denominadas *opciones de intercambio* (su ecuación diferencial cuando los subyacentes pagan dividendos puede verse en Trigeorgis,1996, 117-119). Una primera solución de la ecuación diferencial valora la opción de intercambiar un activo con riesgo, V, por otro, S, (Margrabe, 1978, 177-186). La segunda solución valora la opción sobre el mayor o el menor de dos activos con riesgo, (Stulz, 1982, 161-185)[11]. Por último, Myers-Majd (1990, 1-21) modelizan la flexibilidad de la opción de abandono de una inversión como una opción de venta americana sobre una acción que paga dividendos, en la que la rentabilidad por dividendos y el precio de ejercicio son variables. Así, el primer activo con riesgo, V, se identifica con la corriente de dividendos o flujos de caja del proyecto y el segundo activo con riesgo, S, con un valor residual aleatorio.

---

[11] La tercera solución es una generalización del caso anterior, obteniendo la opción sobre el mayor o menor de n activos subyacentes, (Johnson, 1987, 227-284).

III.1. Principales modelos.

Como se ha comentado antes, Margrabe determina la ecuación que valora la opción de intercambiar en el momento t dos activos con riesgo que no pagan dividendos, $F(V,S,t)$, opción que se interpreta simultáneamente como una call sobre el activo V con precio de ejercicio S o como una put sobre el activo S con precio de ejercicio V y fecha de vencimiento T (siendo $t \leq T$) Asumiendo un contexto de neutralidad al riesgo demuestra que esta opción de intercambio equivale a una cartera que consiste en vender $F_V \equiv \partial F/\partial V$ unidades del activo V y en comprar $F_S \equiv \partial F/\partial S$ unidades del activo S. Finalmente, a partir de (11) y con los cambios adecuados, obtiene la ecuación diferencial (12) que tiene como solución la expresión (13), sujeta a la condición terminal $F(V,S,T)=max\ (V\text{-}S,0)$ en la fecha T, siendo $s^2 (s^2 = \sigma^2_V + \sigma^2_S - 2\rho\ \sigma_V\ \sigma_S.)$ la varianza del cociente (V/S).

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2_V V^2 F_{VV} + \rho_{VS}\sigma_V\sigma_S VSF_{VS} + \frac{1}{2}\sigma^2_S S^2 F_{SS}\right) - F_t = 0 \tag{12}$$

$$F(V,S,t) = VN(d_1) - SN(d_2) \tag{13}$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V}{S}\right) + \frac{1}{2}s^2 t}{s\sqrt{t}} \tag{14}$$

$$d_2 = d_1 - s\sqrt{t} \tag{15}$$

Para demostrar que la ecuación (13) es solución de la ecuación diferencial, Margrabe simplificó su fórmula inicial hasta transformarla en la propuesta por Black-Scholes (1973), basándose en el hecho de que el valor de las opciones de intercambio son *funciones homogéneas de grado 1* (es decir, si se cumple que $F(cV,cS)=cF(V,S)$,entonces, $F(V,S,t)=SF(V/S;1,t)$). Por tanto, si consideramos que el activo S actúa como subyacente numerario y expresamos V en unidades de S, el valor de V pasa a ser $X=V/S$, con varianza s^2, y valor de S en términos de él mismo igual a la unidad, que es, además,el precio de ejercicio de la opción. En cuanto a la interpretación que tiene la utilización de una tasa de interés nula, sólo precisar que el prestamista de una unidad del activo S exigirá una unidad de activo S como amortización del principal al vencimiento, entendiendo así que no existen cargos por intereses y que su capitalización vía plusvalías, durante la vida de la opción, es la única retribución que le compensa del riesgo[12]. Teniendo en cuenta todas estas transformaciones la opción de cambiar el activo S por el activo V es una call sobre X con precio de ejercicio

[12] Si el activo numerario S pagase por dividendos D_S, la tasa de interés sin riesgo r sería sustituida por D_S.

igual a la unidad y tasa de interés igual a cero, siendo, por tanto, un caso especial de la fórmula de Black-Scholes, según se indica en (16).

$$C(X,t)=\frac{F(V,S,t)}{S}=XN(d_1)-1e^{-0t}N(d_2) \qquad (16)$$

El modelo propuesto por Stulz valora la opción europea de recibir el menor o mayor de dos activos subyacentes que no pagan dividendos (su desarrollo matemático, desde la ecuación diferencial hasta la solución, puede verse en el anexo 1). Inicialmente analizaremos cómo se valora la opción sobre el mayor de dos activos arriesgados con precio de ejercicio E_T, $MX(\cdot)$. Stulz demuestra que el precio de la opción en el momento t ,antes del vencimiento, con precio de ejercicio corresponde al valor actualizado de una call europea cuya expresión se recoge en (17), donde VA [·] es el valor actual del operador.

$$MX(S_t,V_t,E_T;t)=VA[\max(\max(S_T,V_T)-E_T,0)] \qquad (17)$$

El proceso que sigue Stulz se basa en diseñar una cartera equivalente en la que los dos primeros sumandos del segundo miembro de la igualdad representan el valor de opciones call europeas sobre S y V respectivamente en el momento t, con precio de ejercicio E_T, correspondiendo el tercero al valor de una opción call europea sobre el menor de S y V , $MN(\cdot)$, según (18), donde la opción sobre el menor de dos activos con riesgo corresponde a la expresión (19):

$$MX(S_t,V_t,E_T;t)=C(S_t,E_T;t)+C(V_t,E_T;t)-MN(S_t,V_t,E_T;t) \qquad (18)$$

$$MN(S_t,V_t,E_T;t)=VA[\max(\min(S_T,V_T)-E_T,0)] \qquad (19)$$

Si en (18) suponemos que E_T=0, de las opciones call europeas se recibe S_T y V_T respectivamente en el momento T, de manera que el valor de (18) se reduce a (20):

$$MX(S_t,V_t,0;t)=S_t+V_t-MN(S_t,V_t,0;t) \qquad (20)$$

El término MN (·) de (20) corresponde a la expresión (21), siendo $VA[\max(S_T-V_T,0)]$ el valor actual de la opción de intercambio de una unidad del activo V por otra de S en el momento T, según Margrabe.

$$MN(S_t,V_t,0;t)=S_t-VA[\max(S_T-V_T,0)] \qquad (21)$$

Finalmente, sustituyendo (21) en (20) se obtiene el valor de la opción europea que da el derecho a recibir el mayor de dos activos con riesgo, expresión (22):

$$MX(S_t,V_t,0;t)=V_t+VA[\max(S_T-V_T,0)] \tag{22}$$

III.2. Valoración de activos reales mediante opciones de intercambio.

Desde que la *Teoría Financiera Moderna* viene utilizando el valor actualizado neto (VAN) para evaluar proyectos de inversión, la principal cuestión de los trabajos sobre análisis de inversiones ha estado centrada en la determinación de la tasa de actualización apropiada, en detrimento de la modelización de los flujos de caja y del valor residual del proyecto que son variables también importantes (Myers-Majd, 1990, 1).

El análisis convencional de proyectos de inversión considera una determinada vida económica asignando un valor residual conocido al final e ignorando la posibilidad de su abandono de forma anticipada. Sin embargo, si consideramos que existe un mercado secundario, el propietario del activo tiene la posibilidad de elegir durante la vida útil entre dos estructuras de flujos de caja: las derivadas de las operaciones de explotación, *use value*, y las que provienen de su posible venta en el mercado, *exit value*, (Ronen-Sorter,1972, 252-280 y Myers-Majd, 1990). Las investigaciones en este sentido han llegado a la conclusión de que valor de un activo es igual al valor actualizado de los flujos de caja de explotación esperados más el *valor de la flexibilidad* derivada de su posible venta en el mercado secundario, flexibilidad que se asimila a una opción de venta europea sobre los flujos de caja operativos del proyecto como activo subyacente, con precio de ejercicio el valor residual y fecha de vencimiento su vida útil (Kesinger, 1987, 31-42 y Trigeorgis-Mason, 1987,14-21). Además, si se tiene en cuenta la relación de paridad put-call, se concluye que un activo real equivale a mantener una opción call de intercambio sobre el mayor de dos subyacentes, el valor derivado de su explotación y el valor residual, con fecha de vencimiento igual a la vida útil del activo.

La hipótesis de que el precio de ejercicio de la opción o valor residual es una constante supone una simplificación inicial, ya que lo normal es que tenga un comportamiento estocástico durante la vida del proyecto, de manera que la opción de venta que estamos considerando tiene un valor de abandono aleatorio.

Myers-Majd son los primeros que calculan el valor de la opción de abandono que permanentemente tiene un proyecto de inversión mediante un planteamiento financiero que desagregan en dos partes. En la primera, asumen inicialmente que el valor actual del proyecto, X, sigue un proceso de difusión, donde el derecho de abandono equivale a una opción de venta americana sobre un proyecto que paga unos flujos de caja con rentabilidad por este concepto igual a $D=FC/X$ y precio de ejercicio el valor residual, R, siendo ambas, X y R variables aleatorias. La ecuación diferencial que inicialmente proponen, como paso previo a la fórmula que valora la opción de abandono, $A(X,t)$, y que recogemos en (23), está sujeta a tres condiciones de contorno: $A(X,0)=max(R-X,0)$, $A(0,t)=R$ y $A(\infty,t)=0$. La primera condición se refiere al valor de la opción al vencimiento o final de la vida física del activo, $t=T$; la segunda indica que si el valor del proyecto es cero , el precio de la opción es su valor residual en ese momento; por último, la tercera expresa que a medida que el valor del proyecto se hace infinitamente grande, el valor de la opción tiende a cero.

$$\frac{1}{2}\sigma^2X^2A_{XX}+(r-D)XA_X-A_t-rA=0 \tag{23}$$

Sin embargo, su ecuación diferencial no tiene una solución analítica como en el caso de la fórmula Black-Scholes debido, en opinión de los mismos, a que, primero, los valores residuales son aleatorios y a que mantienen una relación compleja con el valor del proyecto y, segundo, a que las tasas de rentabilidad, D, son también inciertas y pueden depender del tiempo y del valor del proyecto. Al no existir una solución analítica resuelven mediante un método de aproximación numérica denominado técnica de *diferencias finitas explícitas*, lo que les permite establecer una relación entre el valor de la opción de abandono en cualquier período y sus valores en el período siguiente. La hipotésis de partida es que la aleatoriedad afecta exclusivamente a los flujos de caja siendo el valor residual conocido aunque decreciente a una tasa constante.

Las conclusiones que obtienen son perfectamente compatibles con la teoría de opciones convencional: 1) un incremento del precio de ejercicio (valor residual, R) incrementa el valor de la opción de abandono, 2) un incremento de la volatilidad del subyacente (σ^2_X) aumenta el valor de la opción , 3) un incremento del valor del subyacente (valor proyecto, X) reduce el valor de la opción y 4) una disminución de la vida útil del proyecto también reduce el valor de la opción.

En la segunda parte de su trabajo consideran la posibilidad de abandono como una opción compuesta por una sucesión de opciones, ya que, por una parte, el activo puede pasar de un uso a otro varias veces durante su vida y, por otra, en el valor residual, cada vez que se produce un abandono, permanece la opción de un nuevo abandono. Para tratar la aleatoriedad del valor residual introducen dos elementos simplificadores: el primero se refiere a que tanto X como R siguen procesos de difusión y el segundo a que existen activos idénticos a X y R negociándose en el mercado. El resultado final les conduce irrevocablemente, con las adecuadas transformaciones, al modelo de opciones de intercambio propuesto por Margrabe que hemos analizado anteriormente.

Por tanto, el *Principio Fundamental de Valoración* establece que el *valor de un activo real, V_t, es igual al valor actualizado de sus flujos netos de caja operativos más una opción de venta sobre dichos flujos con precio de ejercicio igual a su valor residual, o alternativamente, también equivale al valor actualizado de sus flujos netos de caja operativos más una opción de compra sobre el valor residual con precio de ejercicio igual al valor de los flujos netos de caja*[13]. Es decir, tener un activo real, para el que existe un mercado secundario, equivale a mantener una opción de compra de intercambio sobre el mayor de dos activos con riesgo: flujos de caja operativos y valor residual, según se indica en la expresión (24):

---

[13] Por último, también el activo sería igual al valor actualizado del valor residual más una opción de compra sobre los flujos netos de caja operativos con precio de ejercicio el propio valor residual

$$V_t = MX(R_t, X_t, 0; T-t) = \max[X_T, R_T] = X_t + VA[\max(R_T - X_T, 0)] \quad (24)$$

donde:

X_t= Valor de mercado de los flujos de caja de explotación en el momento t, suponiendo que todos se han generado en la fecha de vencimiento de la opción, T.

R_t= Valor residual del activo en el momento t a precio de mercado.

T-t= Vida útil del activo.

$VA[\max(R_T - X_T, 0)]$= Valor actual, en t, de una opción de venta que permite a su propietario intercambiar los flujos de caja que genera el proyecto por el valor residual en la fecha de vencimiento.

Sin embargo, el principio fundamental de valoración de activos reales requiere algunos comentarios antes de su aplicación (Cheung, 1990, 727-728). Primero, la determinación de X_t y R_t puede no ser válida si se utiliza exclusivamente la información contable que se deriva del balance de situación, ya que en la misma no se recoge la interrelación que mantiene el activo con el resto de las partidas de la estructura económica y que evidentemente puede ser una fuente de valor. Este inconveniente se puede paliar, en parte, si la expresión (24) se aplica sobre un conjunto de activos que estén relacionados funcionalmente, (Brennen-Schwartz, 1985, 135-157). Segundo, y unido al problema anterior, está la cuestión de la fecha de vencimiento de la opción de abandono, que en el caso de algunos activos se conoce con cierto grado de exactitud pero no en otros. Una solución puede estar en considerar la vida útil del conjunto de activos que mantienen una relación funcional como un "todo". La tercera consideración es consecuencia de la simplificación que se establece al suponer que todos los flujos de caja se generan en el momento final T, ya que en realidad se obtienen durante la vida útil del proyecto. Por otra parte, una reducción de la capacidad de generar renta del activo, durante dicho período, hace más probable el ejercicio anticipado de la alternativa de abandono, mayor flexibilidad, lo que supone que estamos en presencia de una opción de venta americana con un valor superior a la correspondiente opción de estilo europeo inicialmente considerada. En este sentido, la expresión (24), tal y como se ha presentado, reflejará un valor aproximado, a la baja, de la verdadera opción de abandono, lo que desde el punto de vista operativo evita tener que resolverla mediante procedimientos numéricos.

Por último, indicar que todo el planteamiento teórico, subyacente en el principio fundamental de valoración de activos reales, está basado en la hipótesis de que existe un mercado eficiente para los activos X y R. Puesto que esta hipótesis es muy restrictiva, e incluso poco realista, puede sustituirse por otra que asuma la existencia de un mercado completo donde se negocian carteras sintéticas que tienen flujos de caja similares a los proporcionados por los activos X y R.

IV. APLICACION EN LAS FINANZAS EMPRESARIALES DEL PRINCIPIO DE VALORACION.

Una vez introducida la valoración de activos reales mediante opciones de intercambio, el objetivo que nos proponemos es aplicar el modelo para analizar las decisiones estratégicas de carácter financiero que se llevan a cabo en la corporación y evaluar las consecuencias que tienen en el valor de los pasivos, básicamente en las acciones y en la deuda.

Si los fondos propios y la deuda se consideran contratos reclamables u opciones compuestas sobre los activos de la empresa es evidente que tanto los flujos de caja como el valor residual son las variables a tener en cuenta cuando se valoran los pasivos empresariales. El análisis de los activos mediante modelos de opciones de intercambio tiene múltiples aplicaciones en el área financiera de la empresa, por ejemplo, cuando se analizan las garantías reales de las empresas con apalancamiento o cuando se valoran los efectos que en el patrimonio de accionistas y obligacionistas tienen los procesos de fusión y escisión de empresas y de sustitución de activos. También tiene aplicación en el ámbito de la gestión de carteras que asumen pasivos o determinados objetivos de rentabilidad, caso de fondos de pensiones de empresa internos y de fondos de inversión garantizados.

IV.1. El valor de los activos empresariales como garantía de las deudas.

Una de las decisiones financieras más importantes de la corporación es sin lugar a dudas la determinación del nivel de apalancamiento financiero o relación entre fondos ajenos y capital propio más adecuado. Junto a esta cuestión normalmente hay que considerar el valor de las garantías que la empresa ofrece con sus activos a los titulares de la deuda.

Si consideramos el planteamiento financiero de Black-Scholes, la posición del obligacionista, desde la óptica de una opción de compra, se contempla como la del propietario de la empresa que además emite una opción call con fecha de vencimiento final T y precio de ejercicio el nominal de la deuda, D_T. Al vencimiento, si el valor de los activos, V_T, supera la deuda recibe su nominal, pasando la empresa a ser propiedad de los accionistas al ejercer su derecho. Si es inferior, los accionistas no ejercen su opción de compra, siendo el patrimonio de los obligacionistas igual al de una empresa que es insolvente. Por consiguiente, el valor de la deuda al vencimiento es $D_T = min\ (V_T, D_T)$, de lo que se deduce, en primer lugar, que el valor de los activos es una variable relevante que influye en el valor de la deuda y, en segundo término, que a medida que se incrementa su valor mayor garantía tendrán los créditos de la empresa.

Pero además, hay que tener en cuenta que el precio de los activos, determinado por la ecuación fundamental de valoración según (24), es una expresión que equivale a la estrategia de seguro de cartera o *portfolio insurance*, ya que $V_T = max\ (X_T, R_T)$, siendo el contrato de seguro la opción de venta sobre los flujos de caja de la explotación con precio de ejercicio el valor residual, hecho que ha de tener su influencia en la cotización de la deuda[14]. Finalmente, se obtiene que $D_T = min\ \{(max\ (X_T, R_T), D_T\}$, lo que demuestra que el valor residual es una garantía adicional para los propietarios de la deuda de la empresa, Cheung (1990, 729-730).

Para analizar el papel asegurador y la influencia que tiene el valor residual en la cotización de la deuda, supongamos dos empresas A y B que son iguales en todo excepto en que la primera tiene un activo con valor residual final $R^A_T>0$, siendo el de la segunda nulo, $R^B_T=0$. Si sus estructuras de flujos de caja son iguales, $X^A_T= X^B_T$, las diferencias entre los valores residuales da lugar a que los activos de la primera sean más valorados que los de la segunda y a que la deuda de A, entendida como un derecho reclamable, también tenga más valor que la de B, siendo la diferencia igual a una opción de venta sobre los flujos de caja de A, X^A_T, con precio de ejercicio su valor residual, $R^A{}_T$. La demostración se obtiene a partir de las expresiones (25) y (26), donde se refleja el valor de ambas empresas en el momento t anterior a la fecha de vencimiento T.

$$V^A_t = D^A_t + S^A_t = VA(\min(\max[R^A_T, X^A_T], D^A_T)) + VA(\max(\max[R^A_T, X^A_T] - D^A_T, 0)) \tag{25}$$

$$V^B_t = D^B_t + S^B_t = VA(\min[X^B_T, D^B_T]) + VA(\max[X^B_T - D^B_T], 0) \tag{26}$$

Para comprobar finalmente que la deuda de A tiene más valor que la de B realizaremos dos simplificaciones: la primera supone que el valor residual de A es menor o igual que su correspondiente flujo de caja, $R^A_T \leq X^A_T$, y la segunda que las deudas de ambas empresas tienen el mismo valor final en T, $D^A_T=D^B_T$. Según la primera, S^A_T en la expresión (25) es igual a $VA[max(X^A_T - D^A_T, 0)]$. A partir de la segunda, teniendo en cuenta la igualdad de flujos de caja, S^A_T también es igual a S^B_T . Por consiguiente, si los valores del capital propio coinciden en ambas empresas, si los flujos de caja operativos son iguales y si la deuda de A tiene un valor superior a la de B en el momento t, quiere decir que la diferencia es igual a la opción de venta que la empresa A tiene y que corresponde a un contrato de seguro sobre los créditos, expresión (27), lo que confirma que los valores residuales juegan un papel de garantía y de flexibilidad adicional para los créditos de una empresa apalancada.

$$D^A_t - D^B_t = V^A_t - V^B_t = VA[\max(R^A_T - X^A_T, 0)] = VA[\max(R^A_T - X^B_T, 0)] \tag{27}$$

V.2. Efectos de las fusiones conglomerado en el patrimonio de accionistas y obligacionistas.

Una fusión de conglomerado es *aquella en la que no existe sinergia económica de ningún tipo -no hay economías de escala ni incremento de la eficiencia; no existe complementariedad entre la investigación,*

---

[14] Una estrategia de seguro de cartera equivale: (1) a invertir en un activo de referencia y a comprar una opción put sobre el mismo con precio de ejercicio igual a su valor inicial o (2) a comprar una opción call sobre el activo de referencia, con precio de ejercicio igual a su valor inicial, y a invertir en tesorería una cantidad igual al valor del precio de ejercicio descontado a la tasa de un activo sin riesgo.

la comercialización y la producción; tampoco se logran ventajas fiscales, y así por el estilo, (Weston-Copeland, 1995,vol I, 526).

Si bien una fusión de conglomerado no produce efectos reales, ya que el valor de mercado de la entidad resultante es igual a la suma de los respectivos valores de mercado de las empresas fusionadas y, por consiguiente, no crea un valor adicional, sin embargo, si aparecen efectos financieros sobre el patrimonio de accionistas y obligacionistas. En concreto, la fusión provoca un traspaso de riqueza de los accionistas a los obligacionistas (Rubinstein, 1973, 167-181; Ross-Westerfield-Jaffe, 1995, 908-911). Este efecto financiero sobre el valor de las acciones ya fue analizado por Galai-Masulis (1976) aplicando la valoración de derechos reclamables a estos títulos. La idea que subyace es que si el valor de las acciones, como opción de compra, es una función creciente respecto a la volatilidad de los activos, la diversificación que se produce tras la fusión de las empresas apalancadas, cuyos flujos de caja no están perfectamente correlacionados, reduce la volatilidad de la entidad resultante, disminuyendo así el valor de la opción o cotización del capital propio, lo que explica el impacto negativo de la fusión en el patrimonio de los accionistas[15]. Dicho de otra forma, en una fusión de conglomerado, la transferencia de parte del patrimonio de los accionistas hacia los obligacionistas se produce porque una opción de compra suscrita sobre la cartera de activos de la entidad fusionada, F, vale menos que una cartera con *n* opciones de compra sobre cada una de la entidades antes de la fusión, en tanto que los activos no se encuentren perfectamente correlacionados, según se recoge en (28), (Weston-Copeland, 1995, 527).

$$VA(\max(\max[R^F{}_T, X^F{}_T] - D^F{}_T, 0)) \leq \sum_{i=1}^{n} VA(\max(\max[R^i{}_T, X^i{}_T] - D^i{}_T, 0)) \qquad (28)$$

Si las empresas A y B experimentan una fusión de conglomerado, siendo F la empresa resultante, si no existen efectos reales sobre su valor de mercado y si sólo consideramos los de tipo financiero, tendremos que $V^F{}_t = V^A{}_t + V^B{}_t$, $X^F{}_t = X^A{}_t + X^B{}_t$, $R^F{}_t = R^A{}_t + R^B{}_t$, $S^F{}_t \leq S^A{}_t + S^B{}_t$ y $D^F{}_t \geq D^A{}_t + D^B{}_t$.

Una vez comprobado mediante (28) como el valor de mercado de las acciones se reduce tras la fusión, lo que supone una transferencia de patrimonio en favor de los titulares de la deuda, nos quedaría por analizar el *efecto dilución de las garantías* de las deudas en ese proceso, basándonos en el principio fundamental de valoración de activos, expresión (24). Supongamos que los activos de la empresa A tienen valor residual al vencimiento en *T* y que el correspondiente a la empresa B es nulo, que los flujos de caja de ambas empresas son iguales y que los valores finales de sus deudas en *T* también coinciden. Según estos datos, el valor de la deuda de la empresa fusionada en *t* se recoge en la fórmula (29):

---

[15] Hay que matizar que la explicación que se viene dando, por parte de la teoría financiera para justificar fusiones de tipo conglomerado, que no sintonizan a priori con el objetivo de maximización del valor de mercado de la empresa, es el potencial de apalancamiento financiero que se deriva de la fusión, hecho que permitiría volver a incrementar el valor de mercado del capital propio, a lo que habría que añadir el incremento de valor derivado del gasto fiscal de intereses.

$$D^F_t = VA(\min(\max[R^F_T, X^F_T], D^F_T)) = VA(\min(\max[R^A_T, X^F_T], D^F_T)) \quad (29)$$

Si antes de la fusión el valor al vencimiento de las deudas el mismo, la participación de ambas en el pasivo ajeno de la fusionada, D^F_t, tendrá que ser al cincuenta por ciento. En concreto, para el caso de la empresa B será $D^F_t/2 = VA\ \{min(max\ [R^A_T/2, X^B_T], D^B_T)\}$. Antes de la fusión su deuda valía $D^B_t = VA[min(X^B_T, D^B_T)]$, de manera que la diferencia determina el efecto dilución que se produce en las garantías de la deuda de A en favor de la de B, siendo el valor de la transferencia igual al de una opción de venta según se indica en la expresión (30). La transferencia obedece, fundamentalmente, a que la garantía del valor residual que tenía A exclusivamente antes de la fusión se comparte posteriormente con la empresa B.

$$\frac{D^F_t}{2} - D^B_t = VA[\max(\frac{R^A_T}{2} - X^B_T, 0)] \quad (30)$$

IV.3. Efectos de las escisiones de empresas en el patrimonio de accionistas y obligacionistas.

Las escisiones empresariales son el lado opuesto de las fusiones, ya que suponen una reorganización empresarial que tiene como resultado la creación de varias empresas nuevas e independientes de la primitiva.

Si la escisión divide una gran empresa en otras más pequeñas de igual tamaño, deudas y vencimientos y, además, no se originan sinergias negativas en el proceso, el efecto financiero supone un beneficio para los accionistas en detrimento de los obligacionistas, debido fundamentalmente al aislamiento de riesgos que se produce, Weston-Copeland (1995, vol I, 528-529). Es decir, si los titulares de deuda no tienen derechos reclamables sobre los activos de las nuevas empresas, el efecto financiero de la escisión es una disminución de las garantías de a cada uno de los créditos, aspecto que viene acompñado por unos flujos netos de caja de explotación y valores residuales más reducidos.

Supongamos que la empresa F antes de un proceso de escisión cuenta con dos divisiones, A y B, cuyos activos generan unos flujos de caja totales de $X^F_t = X^A_t + X^B_t$, que no están perfectamente correlacionados, siendo el valor residual igual a $R^F_t = R^A_t + R^B_t$. El resultado de la escisión de F son las divisiones, A y B, con los mismos flujos de caja y valores residuales que antes de la separación. La estructura financiera resultante queda de la siguiente forma: toda la deuda de F pasa a ser de la empresa A, $D^F_T = D^A_T$, siendo la de la empresa B nula, $D^B_T = 0$. La consecuencia de este proceso es una reducción de las garantías de las deudas debido a que la empresa A, que es donde se concentra todo el pasivo ajeno, tiene unos flujos de caja de explotación y un valor residual inferiores a los de F. Sin embargo, para los accionistas la reorganización supone recibir parte del patrimonio de los titulares de deuda, hecho que se puede interpretar como un pago de dividendos implícito, ya que los antiguos accionistas siguen manteniendo la misma proporción de capital que tenían antes de la escisión, sólo que repartido entre dos empresas. De esta forma se produce un *efecto de aislamiento de* *riesgos*, ya que los activos de A son los únicos que garantizan el pasivo ajeno total[16].

Para demostrar analíticamente lo anterior, supongamos que la escisión no produce efectos reales en los activos y que sólo existen los de naturaleza financiera. Así, el valor de mercado de los activos de las empresas resultantes, A y B, es igual al de la empresa F, $V^F_t=V^A_t+V^B_t=S^F_t+D^F_t=(S^A_t+S^B_t)+(D^A_t+D^B_t)$. Si el capital social se considera una opción de compra sobre los activos de la empresa y tenemos en cuenta la expresión (28), entonces $(S^A_t+S^B_t)\geq S^F_t$ y $(D^A_t+D^B_t)\leq D^F_t$, donde el valor de las acciones antes y después de las escisión, como opciones de intercambio, corresponde a las expresiones (31), (32) y (33).

$$S^F_t=VA(\max(\max[R^A_T+R^B_T, X^A_T+X^B_T]-[D^A_T+D^B_T],0)) \tag{31}$$

$$S^A_t=VA(\max(\max[R^A_T, X^A_T]-D^F_T,0)) \tag{32}$$

$$S^B_t=VA(\max(\max[R^B_T, X^B_T]-0,0)) \tag{33}$$

IV.4. Efectos de la sustitución de activos en el patrimonio de accionistas y obligacionistas.

Un aspecto de gran interés, que se deriva de considerar el capital social de una empresa con endeudamiento como una opción de compra, es el efecto redistribución de riqueza que se produce entre accionistas y obligacionistas cuando se altera el componente de riesgo específico de los activos empresariales, Weston-Copeland (1995, vol. I, 523-526). Si como establece la teoría financiera, dicho riesgo es independiente del mercado, un incremento del mismo, consecuencia de una sustitución de activos o de un cambio en el programa de inversiones, supone un aumento de la varianza del rendimiento del conjunto de la empresa sin que varíe su componente de riesgo sistemático o beta y, por consiguiente, sin que se produzca una alteración de su valor de mercado. El resultado final de una varianza más elevada es una cotización mayor de la opción call que tienen los accionistas sobre los activos de la empresa. Por otra parte, si consideramos que la posición de los obligacionistas equivale a una cartera compuesta por un bono cupón cero y por la venta de una opción put, con idéntico precio de ejercicio y fecha de vencimiento que la call, la cotización de la opción de venta también aumentará, siendo el valor de su posición neta más reducido.

Hasta aquí sólo hemos considerado el efecto financiero sobre el patrimonio de accionistas y obligacionistas cuando se produce una sustitución de activos y el valor de mercado de la empresa no cambia. Sin embargo, Cheung (1990, 733-734) propone que desde un punto de vista metodológico sería más correcto que, teniendo en cuenta el principio de valoración de activos, expresión (24), inicialmente se analice si se producen efectos reales en la estructura económica, como consecuencia del cambio que implica el nuevo programa de

[16] La transferencia de riqueza podría ser más acentuada si los activos de la empresa A tuviesen flujos de caja y valor residual inferiores a los de la empresa B que no está endeudada.

inversiones, en el sentido de si el mismo modifica o no realmente el valor de mercado de la empresa.

Para determinar los efectos reales de una sustitución de activos supongamos que dicho programa se realiza bajo las siguientes condiciones: 1) la varianza de los flujos netos de caja del nuevo proyecto es superior a la de los equipos antiguos, 2) los flujos netos de caja y la beta son iguales en ambos proyectos y 3) el nuevo proyecto tiene un valor residual inferior al del equipo antiguo.

De acuerdo con los principios del CAPM, si ignoramos el efecto del valor residual, el valor de mercado del activo antiguo es igual al que tiene el equipo nuevo ya que también coinciden sus estructuras de sus flujos de caja y riesgos sistemáticos.

Una valoración según el principio fundamental tiene que considerar el efecto flexibilidad que incorpora la opción de intercambio y, en concreto, el valor de la opción de venta. Antes de producirse la sustitución de los equipos, el valor de la estructura económica viene dado por V^A_t y con posterioridad a la misma por V^N_t, según las expresiones (34) y (35). El hecho de que R^N_T sea inferior a R^A_T supone que el valor de la opción put de los equipos nuevos es inferior al de los antiguos y que V^N_t sea también menor que V^A_t. Pero, por otra parte, al tener los flujos de caja nuevos un riesgo, en términos de varianza, superior al de los antiguos, la opción de venta de los primeros valdrá más, también tendrá más valor el activo nuevo y por consiguiente las acciones tras la sustitución. Según este análisis, se derivan dos resultados de signo opuesto, lo que supone tener que cuantificar, de forma conjunta, la magnitud de ambos efectos. En algunos casos pueden llegar a neutralizarse mutuamente, no viéndose afectado, por consiguiente, ni al valor de la empresa ni al precio de las acciones.

$$V^A_t = MX(X^A_t, R^A_t, 0; T-t) = X^A_t + VA[\max(R^A_T - X^A_T, 0)] \quad (34)$$

$$V^N_t = MX(X^N_t, R^N_t, 0; T-t) = X^N_t + VA[\max(R^N_T - X^N_T, 0)] \quad (35)$$

En resumen, si analizamos las acciones como una opción de compra sobre la empresa, con precio de ejercicio el nominal de la deuda y tenemos en cuenta el principio fundamental de valoración, una sustitución de activos que incremente el riesgo específico de la empresa, manteniendo constante su valor de mercado o su rendimiento esperado, supone un aumento del valor de la opción de compra o, lo que es lo mismo, de la cotización de las acciones. Sin embargo, cuando aparecen efectos reales con el nuevo programa de inversiones será necesario tener en cuenta la influencia conjunta derivada del cambio de la varianza y del valor residual sobre la opción de venta que aparece implícita en el valor de los activos.

IV.5. Valoración de estrategias de seguro de cartera.

Hasta ahora el trabajo se ha centrado en aplicar la valoración de opciones de intercambio sobre activos reales en empresas con deudas, cuestión que puede ampliarse al caso de las inversiones financieras, en concreto, a la gestión de carteras con pasivos o que asumen determinados objetivos de rentabilidad como los fondos de inversión garantizados. El crecimiento de los planes de pensiones en las mayoría de las grandes empresas durante las dos últimas décadas ha hecho que la gestión de estas obligaciones, así como la de los patrimonios que tienen que financiarlas en su día, constituyan una responsabilidad para la Dirección Financiera.

Básicamente, un plan de pensiones tiene dos tipos de pasivos: la obligación por prestaciones acumuladas (*Acumulated Benefit Obligation*, ABO) y la obligación por prestaciones previstas (*Projected Benefit Obligation*, PBO). La primera corresponde al valor actual de los derechos adquiridos por el personal jubilado junto con la deuda de los trabajadores activos de acuerdo con los niveles salariales actuales, es decir, sería el valor del plan si el mismo se interrumpiese en el momento actual. La segunda sería una estimación del valor de las obligaciones que la empresa tiene con su personal si se consideran los niveles salariales futuros.

Para hacer frente a los compromisos o pasivos del plan de pensiones se ha de contar básicamente con dos activos: uno es el valor del fondo de pensiones y el otro el valor actual de las contribuciones que han de pagar los partícipes en el futuro.

Si tenemos en cuenta que la solvencia de un fondo viene determinada por la diferencia entre el valor actual de la cartera de activos y el valor los pasivos del plan, siendo ambas variables aleatorias, la relación que interesa asegurar al responsable financiero es el valor de dicho neto, lo que se conoce como seguro de cartera sobre el valor neto del fondo o *surplus insurance* (Kritzman, 1988, 76-85; Bookstaber-Gold, 1988, 70-80).

Al existir dos tipos de pasivos, el valor neto del fondo se corresponde más con la diferencia entre el valor actual de la cartera de inversión y el valor actual de las pensiones devengadas, que es la deuda actual del fondo. Para que el fondo sea solvente o esté dotado la diferencia entre el valor de ambas variables aleatorias deberá ser mayor o igual que cero o, lo que es lo mismo, que el ratio de dotación sea mayor o igual a la unidad.

$$Valor\ Actual\ del\ Activo - Valor\ Actual\ del\ Pasivo \geq 0 \tag{36}$$

$$Ratio\ de\ Dotación = \frac{Valor\ Actual\ del\ Activo}{Valor\ Actual\ del\ Pasivo} \geq 1 \tag{37}$$

La puesta en práctica de una estrategia de cobertura sobre el neto del fondo durante un período de tiempo T podría realizarse aplicando la cobertura de forma separada sobre el activo y pasivo, de manera que se compraría una opción de venta sobre el activo con precio de ejercicio su valor inicial (*asset insurance*) y una opción de compra sobre los pasivos con precio de ejercicio también su correspondiente valor inicial (*libability insurance*). Si bien esta estrategia separada garantizaría al vencimiento T un valor del activo nunca inferior a su valor inicial y un valor del pasivo nunca superior al que también tenía inicialmente, hay que precisar que es más costosa, desde el punto de vista de su implementación, que la estrategia de cobertura que actúa sobre el neto del fondo directamente. Esto se debe a que la primera supone una sobre protección que consume más recursos y a que las dos opciones por separado no aprovechan la cobertura natural derivada de la interacción existente entre activos y pasivos que no supone coste alguno (Bookstaber, 1988, 213-217; Tarrazón-Montllor, 1993, 44-53).

Por consiguiente, la estrategia de protección debe centrarse en el valor de mercado del neto del fondo, utilizando como seguro opciones de intercambio, ya que tanto activos como pasivos son variables aleatorias, y exigiendo que el ratio de dotación sea en T mayor o igual a una determinada cantidad $\Phi \geq 1$. Para alcanzar el objetivo que permita financiar las prestaciones en el momento de su vencimiento T se compra una opción put sobre los activos con precio de ejercicio el valor final de los pasivos. También se puede adquirir una opción call sobre el pasivo con precio de ejercicio el valor final de los activos. Matemáticamente la situación final del fondo de pensiones, momento T, quedaría según se indica en la expresión (38) y las tablas I y II, donde se supone que X_T es el valor de mercado de los activos con *duración* de Macaulay D_X, R_T es el valor de los pasivos con *duración* de Macaulay D_R y $max[X_T, \Phi R_T]$ que es la opción de intercambio.

$$\frac{\textit{Valor del Activo+Opción de Intercambio}}{\textit{Valor del Pasivo}} = \frac{X_T + \max[\Phi R_T - X_T, 0]}{R_T} = \frac{\max[X_T, \Phi R_T]}{R_T} \geq \Phi \tag{38}$$

Tabla I. Activo más opción de intercambio (opción de venta: $\max[\Phi R_T - X_T, 0]$).

Valor en momento T	$\Phi R_T > X_T$	$\Phi R_T \leq X_T$
Activo Opción de intercambio	X_T $\Phi R_T - X_T$	X_T 0
Resultado de la cobertura	ΦR_T	X_T
Patrimonio neto del fondo	$\Phi R_T - R_T \geq 0$	$X_T - R_T > 0$

Las conclusiones que obtenemos de los resultados anteriores constituyen el fundamento básico de las estrategias de seguro de cartera y de inmunización que siguen actualmente los gestores de fondos de pensiones y fondos de inversión garantizados, con las que establecen estructuras de resultados de tipo asimétrico. Así, si la cotización de la cartera supera el valor de los pasivos en el momento T, el fondo es solvente, la duración de la cartera se mantiene en D_X y la del pasivo en D_R, siendo en principio distintas. Si el valor de la cartera es inferior a las obligaciones por pensiones, se ejerce la opción de intercambio y la cartera de inversiones se sustituye por otra que replique el comportamiento de las deudas, diseñando así una estrategia de inmunización frente al riesgo de mercado, al tener ambas masas patrimoniales idénticas duraciones.

Tabla II. Activo más opción de intercambio (opción de compra:max[ΦR_T-X_T,0]).

Valor en momento T	$\Phi R_T > X_T$	$\Phi R_T \leq X_T$
Activo Opción de intercambio	X_T $\Phi R_T - X_T$	X_T 0
Resultado de la cobertura	ΦR_T	X_T
Patrimonio neto del fondo	$\Phi R_T - R_T \geq 0$	$X_T - R_T > 0$

V. CONCLUSIONES.

Como ya expusimos en la introducción, el objetivo de este trabajo es analizar algunas aplicaciones de la valoración de activos reales como *opciones de intercambio* en el ámbito de las decisiones estratégicas de tipo financiero que se adoptan en las empresas, en el marco de una linea de investigación que actualmente se denomina *Options in Strategic Corporate Finance.*

Para conseguir el objetivo propuesto, la metodología que hemos seguido, primero, establece la ecuación diferencial estocástica generalizada para *n* activos subyacentes, a partir de la que se derivan las soluciones que valoran las opciones que dependen de más de un activo, asumiendo un contexto de mercado similar al propuesto por Black-Scholes (1973); segundo, se determina la ecuación diferencial estocástica para el caso de *2* subyacentes, cuestión clave para llegar a los modelos de opciones de intercambio; tercero, se analiza la valoración de los activos reales como opciones de intercambio, partiendo de la base de que estos son más valiosos si cuentan con un mercado secundario que permita su venta por un valor residual y finalmente se determina el principio de valoración de activos.

El *Principio Fundamental de Valoración* establece que *el valor de mercado de un activo real es igual al valor actualizado de sus flujos netos de caja operativos más una opción de venta sobre dichos flujos con precio de ejercicio igual a su valor residual, lo que también equivale al valor actualizado de sus flujos netos de caja operativos más una opción de compra sobre el valor residual con precio de ejercicio igual al valor de los flujos netos de caja.*

La aplicación de este principio permite valorar distintos aspectos de la realidad empresarial, entre ellos, las garantías que una empresa con apalancamiento ofrece a los titulares de deuda, los cambios patrimoniales que experimentan accionistas y obligacionistas tanto en las fusiones de tipo conglomerado como en las escisiones empresariales, los efectos reales y financieros que se derivan de una sustitución de activos o la solvencia que presenta el fondo de pensiones de una empresa, según la estrategia de gestión de activos y pasivos diseñada.

Las conclusiones que obtenemos se resumen en los siguientes puntos:

1. Si los activos de la empresa son una garantía para las deuda de la empresa, sus valores residuales son una garantías adicional.
2. Si en una fusión de conglomerado, la transferencia de parte del patrimonio de los accionistas a los

obligacionistas se produce porque *una* opción de compra suscrita sobre la cartera de activos de la entidad fusionada vale menos que una cartera con *n* opciones de compra sobre cada una de la entidades antes de la fusión, el resultado es una dilución de las garantías de la deuda de una empresa en favor de las otras.

3. Si en un proceso de escisión empresarial no se producen sinergias negativas, el efecto financiero supone un beneficio para los accionistas, en detrimento de los obligacionistas, debido al efecto aislamiento del riesgo, lo que supone una rebaja de las garantías de las deudas. Por tanto, si el capital social se considera una opción call sobre los activos de la empresa, en la que está presente una opción de intercambio, la cartera compuesta por las opciones de compra sobre los activos de las empresas escindidas tiene mayor valor que la opción de compra sobre la empresa antes de la escisión.

4. Si valoramos el capital propio como una opción de compra sobre la empresa y aplicamos el principio fundamental de valoración de activos mediante opciones de intercambio, una sustitución de activos que conlleva un incremento del riesgo específico de la empresa, sin que se modifique su rendimiento esperado o su valor mercado, beneficiará a los accionistas en detrimento de los titulares de bonos. Sin embargo, en una sustitución de activos con efectos reales sobre la estructura económica es necesario valorar la influencia de la varianza y del valor residual en la opción de venta.

5. El principio fundamental de valoración de activos también tiene aplicación en el ámbito de la gestión de carteras, en concreto, en las estrategias de seguro de cartera que siguen los fondos de pensiones y fondos de inversión garantizados en las que existe inmersa una opción a intercambiar inversiones con objeto de garantizar el pago de un pasivo o la consecución de un objetivo final de rentabilidad.

Por último, indicar que la metodología desarrollada en el trabajo puede extenderse a otros campos dentro de las Finanzas Empresariales, ya que la aplicación de la Teoría de Opciones en las decisiones de inversión y financiación de la empresa incorpora una serie de modelos que permiten valorar en términos de opciones de compra, de venta o combinando ambas, frente a los modelos más tradicionales, basados fundamnetalmente en el descuento de flujos de caja, donde se presentan problemas cuando se intenta cuantificar el efecto flexibilidad.

VI. BIBLIOGRAFIA.

Black, F., y M. Scholes, (1973):" The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, Mayo-Junio, 637-659.

Black, F., (1991):" Cómo obtuvimos la fórmula para valorar opciones", *Análisis Financiero,* Instituto Español de Analistas Financieros, núm 53, 12-17.

Bookstaber, R., y J. Gold, (1988):" In search of the liability asset", *Financial Analysts Journal*, núm. 44, 70-80.

Bookstaber, R., (1988):" Dynamic hedging and asset allocation strategies", en *Asset Allocation: A handbook of Portfolio Policies, Strategies & Tactics*, 213-217.

Brennan, M., y E. Schawrtz, (1985):" Evaluating natural research investments", *Journal of Business*, Abril, 135-157.

Cheung, J.K., (1990):" The valuation significance of exit values: a contingent-claim analysis", *Contemporary Accounting Research*, vol. 6, núm. 2, 724-737.

Fernández Blanco, M., (1991): *Opciones: activos, mercados y valoración*, Instituto Español de Analistas de Inversiones, Instituto OM, S.L., 149-179.

Galai, D., y R. Masulis, (1976):" The option pricing model and the risk factor of stock", *Journal of Financial Economics* 3, núm. 1/2, Enero-Marzo, 53-81.

Hull, J., (1989): *Options, futures and other derivative securities*, Prentice-Hall International, Inc., 176-179.

Jones, E.P., S.P., Mason y E. Rosenfeld, (1984):" Contingent claims analysis of corporate capital structures: An empirical investigation", *Journal of Finance* 39, núm. 3, 611-624.

Johnson, H.E., (1987):" Options on the minimum of several assets", *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22, núm 3, 277-284.

Kesinger, J., (1987):" Adding the value of active management into the capital budgeting equation", *Midland Corporate Finance Journal*, Primavera, 31-42.

Kritzman, M. P., (1988):" Insuring the asset/liability ratio", en *Portfolio Insurance: A guide to dynamic hedging*, D.L. Lusking (ed), John Wiley & Sons, 76-85.

Margrabe, W., (1978):" The value of an Option to exchange one asset for another", *Journal of Finance,* vol. XXXIII, núm. 1, Marzo, 177-186.

Mason, S.P., y R.C. Merton, (1985) " The role of contingent claims analysis in corporate finance". In *Recent Advances in Corporate Finance*, ed. E. Altman and M. Subrahmanyam. Irwin.

Merton, R.C., (1974):" On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates", *Journal of Finance* 29, núm. 2, 449-470.

Merton, R.C., (1977):" On the pricing of contingent claims an the Modigliani-Miller Theorem", *Journal of Financial Economics* 5, núm. 2, 241-249.

Myers, S.C., (1976):" Determinants of corporate borrowing", *Journal of Financial Economics* 5, núm. 2, 147-176.

Myers, S.C., (1987):" Finance theory and financial strategy", *Midland Corporate Finance Journal* 5, núm. 1, 6-13.

Myers, S.C., y S. Majd, (1990):" *Abandonment value and project life*", Advances in Futures and Options Research, núm. 4, 1-21.

Ronen, J., y G. Sorter, (1972):" *Relevant Accounting*", Journal of Business, 252-280.

Ross, A.R, R.W. Westerfield, y F.J. Jeffrey, (1995): *Finanzas Corporativas*, 3ª edición, Irwin, 908-911.

Rubistein, M., (1973):" A mean-variance synthesis of Corporate Finance Theory", *Journal of Finance*, Marzo, 167-181.

Stulz, R., (1982):" Options on the minimum of two risky assets:analysis and aplications", *Journal of Financial Economics*, núm. 10, 161-185.

Tarrazón Rodón, M.A., y Montllor I, Serrats, (1993):" Estrategias de inversión de los fondos de pensiones", *Perspectivas del Sistema Financiero*, núm. 42, 44-53.

Trigeorgis, L. (1996): *Real Options. Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, The MIT Press, London, 95-98,107-116.

Trigeorgis, L., y S. Mason, (1987):" Valuing managerial flexibility ", *Midland Corporate Finance Journal*, Primavera, 14-21.

Weston, J.F., y T.E. Copeland, (1992): *Finanzas en Administración*, vol. 1, McGraw-Hill, 9ª edición, 521-529.

VII. ANEXO.

El trabajo de Stulz (161-185, 1982) básicamente aporta las fórmulas para valorar opciones call y put de estilo europeo sobre el menor o mayor de dos activos con riesgo. De la misma forma que Margrabe (1987), Stulz parte de la base de que los activos subyacentes, V y S, no pagan dividendos y de que sus precios siguen procesos de difusión como los de la expresión (2) dentro de un mercado completo. Demuestra que en estas condiciones una cartera autofinanciada que sea réplica del valor de la opción call europea sobre el menor de V y S, *min (V,S)*, con precio de ejercicio E, que expresaremos como *MN (V,S,E;t)*, deberá satisfacer la siguiente ecuación diferencial parcial, cuya solución es la expresión (A.5), donde d=0:

$$\left(\frac{1}{2}\sigma^2_V V^2 M_{VV}+\rho_{VS}\sigma_V\sigma_S VSM_{VS}+\frac{1}{2}\sigma^2_S S^2 M_{SS}\right)+[rVM_V+rSM_S]-M_t-rM+d=0 \qquad (A.1)$$

sometida a las siguientes condiciones:

$$MN(V,S,0)=\max(\min[V,S]-E,0) \qquad (A.2)$$

$$MN(S,0,t)=0 \qquad (A.3)$$

$$MN(V,0,t)=0 \qquad (A.4)$$

$$MN(V,S,E,t)=VB(a_1,b_1,\rho_1)+SB(a_2,b_2,\rho_2)-Ee^{-rt}B(\gamma_1,\gamma_1,\rho) \qquad (A.5)$$

donde $B(a,b,\rho)$ corresponde a una distribución normal standard bivariante con límites de intergración a y b y coeficiente de correlación ρ, siendo:

$$\gamma_1=\frac{Ln(V/E)+[r-(1/2)\sigma_v^2]t}{\sigma_v\sqrt{t}} \qquad (A.6)$$

$$\gamma_2=\frac{Ln(V/E)+[r-(1/2)\sigma_s^2]t}{\sigma_s\sqrt{t}} \qquad (A.7)$$

$$s^2=\sigma^2_v+\sigma^2_s-2\rho\sigma_v\sigma_s \qquad (A.8)$$

$$b_1=\frac{Ln(S/V)-(1/2)s^2\sqrt{t}}{s\sqrt{t}} \qquad (A.9)$$

$$b_2=\frac{Ln(V/S)-(1/2)s^2\sqrt{t}}{s\sqrt{t}} \qquad (A.10)$$

$$\rho_1=\frac{\rho\sigma_s-\sigma_v}{s} \qquad (A.11)$$

$$\rho_2=\frac{\rho\sigma_v-\sigma_s}{s} \qquad (A.12)$$

Si el precio de ejercicio de la opción sobre el menor de los dos activos con riesgo es cero, E=0, el valor de la opción es igual a V menos la opción de intercambio propuesta por Margrabe, *F(V,S,t)* según la expresión (14), de manera que resultaría:

$$MN(V,S,0;t)=V-F(V,S,t)=V[1-N(d_1]+SN(d_2) \qquad (A.13)$$

Por último, Stulz demuestra que el precio de una opción europea sobre el mayor de dos activos con riesgo que no pagan dividendos, con valor al vencimiento igual a *max(max[V,S]-E,0)*, es igual a la expresión (A.14), donde *C(H,E;t)* es el valor de una opción de compra europea en el momento t, sobre el activo H con precio de ejercicio E, y *MN(V,S,E;t)* que viene dado por (A.5)

$$MX(V,S,E;t)=C(V,E;t)+C(S,E;t)-MN(V,S,E;t) \qquad (A.14)$$